## 基础课15 函数的模型及其应用

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 函数的模型及其应用 | 掌握 | 2023年新高考Ⅰ卷  2020年全国Ⅰ卷（理）  2020年全国Ⅲ卷（理） | ★★☆ | 数学抽象  数学建模  数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，函数模型及其应用常结合数学文化背景考查，试题难度中等.预计2025年高考会以数学文化为背景考查对数函数与指数函数的应用 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、几类函数模型

|  |  |
| --- | --- |
| 函数模型 | 函数解析式 |
| 一次函数模型 | ,为常数， |
| 二次函数模型 | ,,为常数， |
| 反比例函数模型 | ,为常数且 |
| 指数函数模型 | ,,为常数，,且 |
| 对数函数模型 | ,,为常数，,且 |
| 幂函数模型 | ,,为常数，, |
| “对勾”函数模型 |  |

##### 二、三种函数模型的性质

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 函数  性质 |  |  |  |
| 在上的增减性 | 单调①递增 | 单调②递增 | 单调③递增 |
| 增长速度 | 越来④越快 | 越来⑤越慢 | 相对平稳 |
| 图象的变化 | 随的增大，逐渐表现为与⑥轴平行 | 随的增大，逐渐表现为与⑦轴平行 | 随的值变化而变化 |
| 值的比较 | 存在一个，当时，有⑧ | | |

【提醒】对于幂函数模型,当时，增长较慢；当时，增长较快.

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 某种商品进价为每件100元，按进价增加出售，后因库存积压降价，若按九折出售，则每件还能获利.( × )

（2） 函数的函数值比的函数值大.( × )

（3） 不存在，使.( × )

（4） “指数爆炸”是指数型函数，且增长速度越来越快的形象比喻.( × )

2. （易错题）某校为了规范教职工绩效考核制度，现准备拟定一个函数用于根据当月评价分数（单位：分，正常情况下，，若有突出贡献可以高于100分，且教职工平均每月评价分数在50分左右）计算当月绩效工资（单位：元），要求绩效工资不低于500元，不设上限且让大部分教职工绩效工资在600元左右，另外在绩效工资越低或越高的同时，人数要越少，则下列函数最符合要求的是( C ).

A. B.

C. D.

【**易错点**】忽视函数的性质致误，在实际应用问题中，要结合问题的实际意义和函数的性质来确定拟合函数.

[解析]由题意知，拟定函数应满足：①是增函数，且增长速度先快后慢再快；②在左右增长速度较慢，且的最小值为500.

对于，在上先减后增，不符合要求；

对于，是指数型函数，增长速度越来越快，不符合要求；

对于，的图象是由的图象平移和伸缩变换得到的，符合题目要求；

对于，是对数型函数，增长速度越来越慢，不符合要求.故选.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版必修①P150·T2改编）在一段时间内，某地的野兔快速繁殖，若野兔总只数的倍增期为21个月，则1万只野兔增长到10万只野兔大约需要年6.，结果填整数

[解析]设经过年后的野兔有只，由题意知，令，即，则.两边取常用对数得，解得.

故大约需要6年.

4. （人教A版必修①P161·T9改编）某工厂产生的废气经过过滤后排放，过滤过程中废气的污染物含量（单位：）与时间（单位：）之间的关系为，其中，是正的常数，若在前消除了的污染物，则后约剩65.61%的污染物.

[解析]当时，，

当时，，即.所以，

当时，，

即后，还剩的污染物.

##### 题组3 走向高考

5. [2020·新高考Ⅰ卷改编]基本再生数与世代间隔是某传染病的流行病学基本参数.基本再生数指一个感染者传染的平均人数，世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间.在该疾病传染的初始阶段，可以用指数模型描述累计感染病例数随时间（单位：天）的变化规律，指数增长率与，近似满足.有学者基于已有数据估计出，.据此，在该疾病传染的初始阶段，累计感染病例数增加1倍需要的时间约为( B ).

A. 1.2天 B. 1.8天 C. 2.5天 D. 3.5天

[解析]因为，，，所以，所以.设在该疾病传染的初始阶段，累计感染病例数增加1倍需要的时间为天，

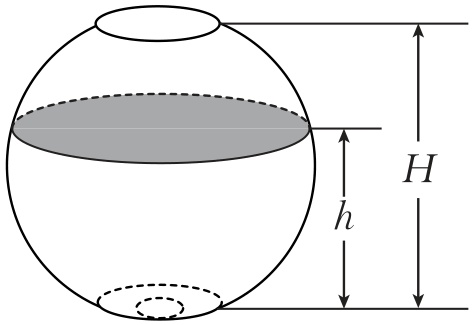
则，所以，所以，

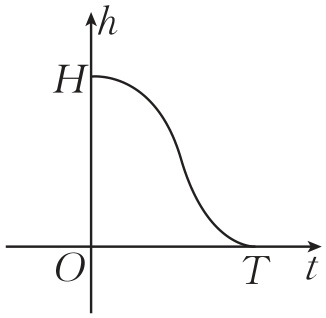
所以（天）.故选.

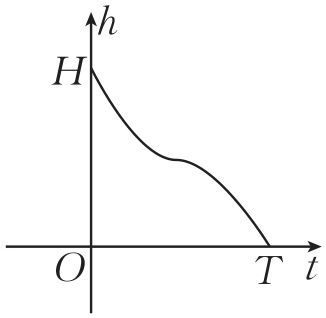
### 考点聚焦·突破

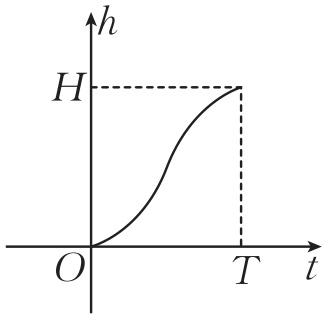
#### 考点一 利用函数图象刻画实际问题［自主练透］

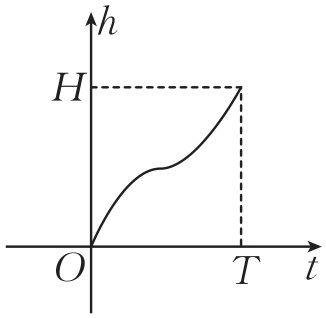
1. 如图，一高为且装满水的鱼缸，其底部装有一个排水小孔，当小孔打开时，水从孔中匀速流出，水流完所用时间为.若当水流出时间为时，鱼缸水深为，则函数的图象大致是( B ).



A. 

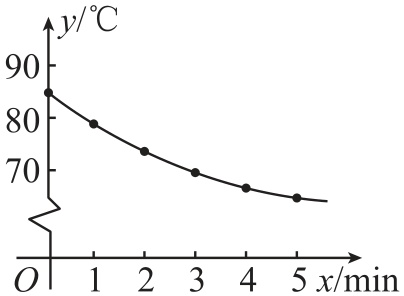
B. 

C. 

D. 

[解析]函数是关于的减函数，故排除，，从一开始，随着时间变化而减小，但变化逐渐变慢，当超过一半时，减小的速度变快，故选.

2. [2024·泰州模拟]某研究人员每隔测量一次茶水的温度，根据所得数据作出如图所示的散点图.观察散点图的分布情况，下列可以近似地刻画茶水温度（单位：）随时间（单位：）变化规律的数学模型是( B ).



A.

B.

C.

D. ，，且

[解析]由函数图象可知符合条件的只有指数函数模型，并且,.故选.



**判断函数图象与实际问题变化过程相吻合的两种方法**

1.构建函数模型法：先建立函数模型，再结合模型选图象.

2.验证法：根据实际问题中变量的变化快慢等特点，结合图象的变化趋势，验证是否吻合，从中排除不符合实际情况的答案.

#### 考点二 已知函数模型解决实际问题［自主练透］

1. [2024·北京模拟]科学家经过测量发现候鸟的飞行速度可以表示为函数（单位：），其中表示候鸟每分钟耗氧量的单位数，常数表示测量过程中候鸟每分钟的耗氧偏差.若雄鸟的飞行速度为，雌鸟的飞行速度为，则此时雄鸟每分钟的耗氧量是雌鸟每分钟耗氧量的( B ).

A. 2倍 B. 3倍 C. 4倍 D. 5倍

[解析]设雄鸟每分钟的耗氧量为，雌鸟每分钟的耗氧量为，由题意可得两式相减可得，所以，即，故此时雄鸟每分钟的耗氧量是雌鸟每分钟耗氧量的3倍.故选.

2. [2024·云南模拟]牛顿冷却定律描述了一个物体在常温环境下的温度变化：若物体的初始温度为，则经过一定时间（单位：分钟）后的温度（单位：）将满足，其中是环境温度，称为半衰期.现有一杯的热茶，放置在的房间中，若热茶降温到，需要10分钟，则欲降温到，大约需要( C )分钟.（参考数据：，）

A. 12 B. 14 C. 16 D. 18

[解析]根据题意有，解得，

所以，则，解得.故选.



**已知函数模型解决实际问题的要点**

1.认清所给函数模型，弄清哪些量为待定系数.

2.根据已知条件，利用待定系数法，确定模型中的待定系数.

3.利用该函数模型，借助函数的性质、导数等求解实际问题，并进行检验.

#### 考点三 构建函数模型解决实际问题［多维探究］

##### 二次函数模型角度1

典例1 （双空题）劳动实践是大学生学习知识、锻炼才干的有效途径，更是大学生服务社会、回报社会的一种良好形式.某大学生去一服装厂参加劳动实践，了解到当该服装厂生产的一种衣服日产量为件时，售价为元/件，且满足，每天的成本合计为元，则当日产量为200件时，获得的日利润最大，最大利润为7.94万元.

[解析]由题意易得，日利润，

故当日产量为200件时，获得的日利润最大，最大利润为7.94万元，

##### 指数、对数模型角度2

典例2 金针菇采摘后会很快失去新鲜度，甚至腐烂，所以超市销售金针菇时需要采取保鲜膜封闭保存.已知金针菇失去的新鲜度与其采摘后的时间（单位：天）满足的函数解析式为.若采摘后1天，金针菇失去的新鲜度为，采摘后3天，金针菇失去的新鲜度为.若不及时处理，则采摘下来的金针菇在( C )后会失去全部新鲜度.，结果保留一位小数

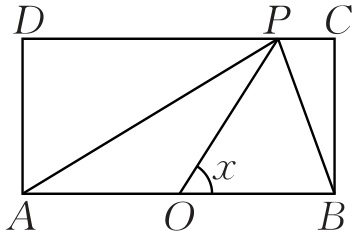
A. 4.0天 B. 4.3天 C. 4.7天 D. 5.1天

[解析]由已知得两式相除得，即，则，因为，所以，

设天后采摘下来的金针菇会失去全部新鲜度，则，又，所以，即，所以，解得（负值已舍去）.故选.

##### 分段函数模型角度3

典例3 如图，在矩形中，，，是的中点，点沿着边，与运动，记，若将的面积表示为关于的函数，则( C ).

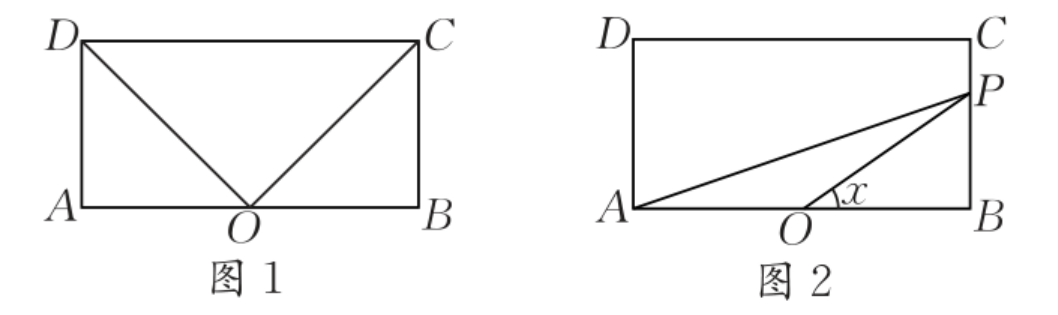


A. 当时， B. 当时，

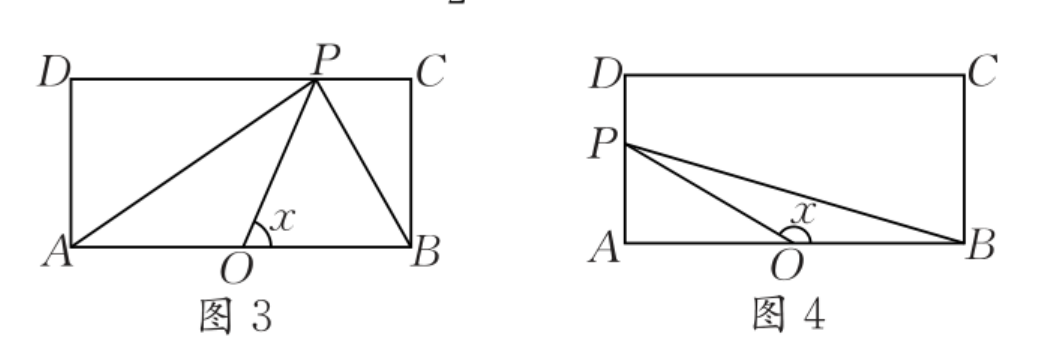
C. 当时， D. 当时，

[解析]，，如图1所示，易得，，

，则.



当时，点在线段上（不包括点），如图2所示，则，此时；当时，点在线段上（不包括点），如图3所示，此时；



当时，点在线段上（不包括点），如图4所示，此时，则，则.故选.



**在应用函数解决实际问题时需注意的四个步骤**

|  |  |
| --- | --- |
| 审题 | 弄清题意，分清条件和结论，理顺数量关系，初步选择函数模型 |
| 求解 | 将自然语言转化为数学语言，将文字语言转化为符号语言，利用数学知识，建立相应的函数模型 |
| 求解 | 求解函数模型，得出数学结论 |
| 还原 | 将数学结论还原为实际问题的答案 |

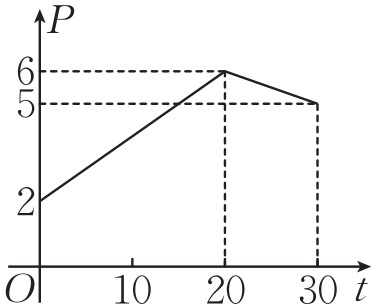
##### 多维训练

1. 天文学用绝对星等衡量天体的发光强度，用目视星等衡量观测者看到的天体亮度，可用近似表示绝对星等、目视星等和观测距离（单位：光年）之间的关系.已知织女星的绝对星等为，目视星等为，大角星的绝对星等为，目视星等为，则观测者与织女星和大角星之间的距离的比值约为( D ).

A. B. C. D.

[解析]设观测者与织女星和大角星之间的距离分别为，，则两式相减得，所以，所以.故选.

2. 某公司在30天内商品的销售价格（单位：元）与时间（单位：天）的关系满足图象所示的函数，商品的销售量（单位：万件）与时间的关系是，则下列说法正确的是( B ).



①第15天日销售额最大；

②第20天日销售额最大；

③最大日销售额为120万元；

④最大日销售额为125万元.

A. ①③ B. ①④ C. ②③ D. ②④

[解析]由图象可得当时，可设，根据图象可知直线过点,，

所以解得所以，当时，可设，根据图象可知直线过点,，

所以解得所以，

故

又，设第天的销售额为万元，

所以

化简可得

当时，，所以，当且仅当时，等号成立；

当时，，所以，当且仅当时，等号成立.

综上可得，第15日的销售额最大，最大值为125万元，故①④正确.

故选.

3. 某科研小组对面积为8000平方米的某池塘里的一种生物的生长规律进行研究.一开始在此池塘投放了一定面积的该生物，观察实验得到该生物的覆盖面积（单位：平方米）与所经过的月数的数据如表所示.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 2 | 3 | 4 |
|  | 4 | 25 | 62.5 | 156.3 |

为了描述该生物的覆盖面积（单位：平方米）与经过的月数的关系，现有以下四种模型可供选择：;;;.

（1）试判断哪种函数模型更适合，并求出该模型的函数解析式；

（2）经过几个月，此生物能覆盖整个池塘？（参考数据：,）

[解析]（1）因为函数刻画的是增长速度越来越快的变化规律，符合表中数据的变化规律，而刻画的是增长速度不变的规律，和刻画的是增长速度越来越慢的变化规律，所以更合适，则解得所以,.

（2）设约经过个月，此生物能覆盖整个池塘，则,解得.

故约经过9个月，此生物能覆盖整个池塘.